Departamento de Matemática da Universidade de Aveiro

Cálculo I - agr. 1 **2018/19**

exame final Duração: 3h00

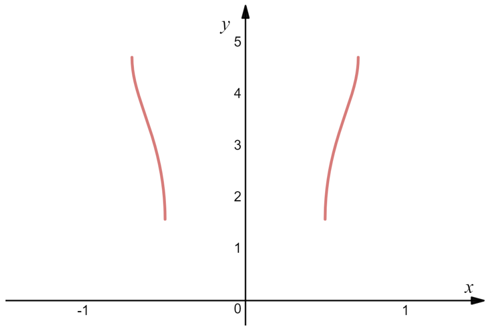
- **Este teste continua no verso e termina com a palavra FIM. No verso encontras também a cotação e formulários.**
- **Todos os raciocínios devem ser convenientemente justificados e todas as respostas devem ser cuidadosamente redigidas.**

1.ª parte

1. Considera a função real de variável real dada pela expressão

$$f(x) := \pi - \arcsin\left(\frac{1}{x^2} - 3\right).$$

Em baixo podes ver um esboço do seu gráfico tal como produzido por um conhecido software gráfico.



Não se garante que este esboço esteja cem por cento correto. Foi aqui colocado para o caso de achares que é útil, mas usa-o por tua conta e risco. O que se pede que faças aqui é que resolvas as questões abaixo usando as técnicas que foram dadas nas aulas (em particular não serão aceites justificações com base no esboço acima):

(a) Determina o domínio D_f de definição de f.

(b) Determina, caso existam, todos os extremos (os absolutos e os relativos) e os respetivos extremantes de f (se achares que algum deles não existe, deves explicar porquê).

2. Calcula as primitivas das seguintes funções:

(a) $x \cdot \dfrac{x}{(x^2+1)^2}$; (b) $\dfrac{4}{x^4 - 3x^3 + 2x^2}$; (c) $\sqrt{\sqrt{x-1} - 1}$.

Sugestão: Na alínea (a) utiliza primitivação por partes e na alínea (c) faz primeiro a mudança de variável definida por $x = t^2 + 1$, $t > 1$, e depois primitiva por partes.

3. Prova o Teorema de Lagrange a partir do Teorema de Rolle. Mais precisamente, dada uma qualquer função f nas hipóteses do Teorema de Lagrange, considera a função $F(x) := f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}x$ e

(a) mostra primeiro que F obedece às hipóteses do Teorema de Rolle,

(b) depois escreve a tese do Teorema de Rolle com F no lugar de f,

(c) e finalmente manipula a conclusão anterior de modo a obteres a tese do Teorema de Lagrange para a função f.

2.ª parte

4. Considera a região $\mathcal{A}$ do plano delimitada pelos gráficos das funções $y = 4 - x^2$ e $y = \frac{3}{x^2}$ no semiplano $x \geq 0$. Esboça $\mathcal{A}$ e calcula a sua área (não precisas de justificar o esboço analiticamente, mas convém seres rigoroso e explícito o suficiente para se perceber como determinas a área a partir do esboço que fizeres).

5. Considera os seguintes integrais: (i) $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{x \ln x}\, dx$; (ii) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt[5]{x^3}}\, dx$.

   (a) Diz, para cada um deles e justificando devidamente, se estamos em presença de um integral de Riemann ou de um integral impróprio (e de que espécie).

   (b) Para cada um dos integrais acima, faz o seguinte: no caso de ser de Riemann, calcula-o; no caso de ser impróprio, determina a sua natureza e, no caso de ser convergente, calcula-o também.

6. (a) Estuda a natureza (divergência, convergência simples ou convergência absoluta) das seguintes séries numéricas:

   (i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \ln\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)$; (ii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n\, 3^{2n}}{(2n)!}$.

   (b) Determina a soma da seguinte série numérica convergente: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sin\frac{\pi}{3n} - \sin\frac{\pi}{3n+6}\right)$.

7. Mostra que $\displaystyle\frac{d}{dx}\int_0^x (x-t)(x-2t)\, e^{t^2}\, dt = \int_0^x (2x-3t)\, e^{t^2}\, dt$.

   Não te esqueças de justificar os teus cálculos.

FIM

Cotação:

1. 3,5; 2. 5; 3. 1,5; 4. 2,5; 5. 2,5; 6. 3,5; 7. 1,5.

Algumas fórmulas de derivação

função de x	$\frac{\mathbf{d}}{\mathbf{dx}}$
$m\, u(x),\ \ m \in \mathbb{R}$	$m\, u'(x)$
$u(x)^n,\ \ n \in \mathbb{R}$	$n\, u(x)^{n-1}\, u'(x)$
$\ln_a \lvert u(x)\rvert,\ \ a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$	$\frac{u'(x)}{u(x) \ln a}$
$a^{u(x)},\ \ a \in \mathbb{R}^+$	$a^{u(x)} u'(x) \ln a$
$\sin u(x)$	$\cos u(x)\, u'(x)$
$\cos u(x)$	$-\sin u(x)\, u'(x)$
$\tan u(x)$	$\sec^2 u(x)\, u'(x)$
$\operatorname{cotan} u(x)$	$-\csc^2 u(x)\, u'(x)$
$\sec u(x)$	$\tan u(x)\ \sec u(x)\, u'(x)$
$\csc u(x)$	$-\operatorname{cotan} u(x)\ \csc u(x)\, u'(x)$
$\sinh u(x)$	$\cosh u(x)\, u'(x)$
$\cosh u(x)$	$\sinh u(x)\, u'(x)$
$\arcsin u(x)$	$\frac{u'(x)}{\sqrt{1-u(x)^2}}$
$\arccos u(x)$	$-\frac{u'(x)}{\sqrt{1-u(x)^2}}$
$\arctan u(x)$	$\frac{u'(x)}{1+u(x)^2}$
$\operatorname{arccot} u(x)$	$-\frac{u'(x)}{1+u(x)^2}$

Algumas fórmulas trigonométricas

$\sec u = \frac{1}{\cos u}$	$\csc u = \frac{1}{\sin u}$
$\cot u = \frac{\cos u}{\sin u}$	
$\cos^2 u = \frac{1+\cos(2u)}{2}$	$\sin^2 u = \frac{1-\cos(2u)}{2}$
$1 + \tan^2 u = \sec^2 u$	$1 + \operatorname{cotan}^2 u = \csc^2 u$
$\cos^2(\arcsin u) = 1 - u^2$	$\sin^2(\arccos u) = 1 - u^2$

Algumas fórmulas hiperbólicas

$\sinh u = \frac{e^u - e^{-u}}{2}$	$\cosh u = \frac{e^u + e^{-u}}{2}$
$\cosh^2 u - \sinh^2 u = 1$	